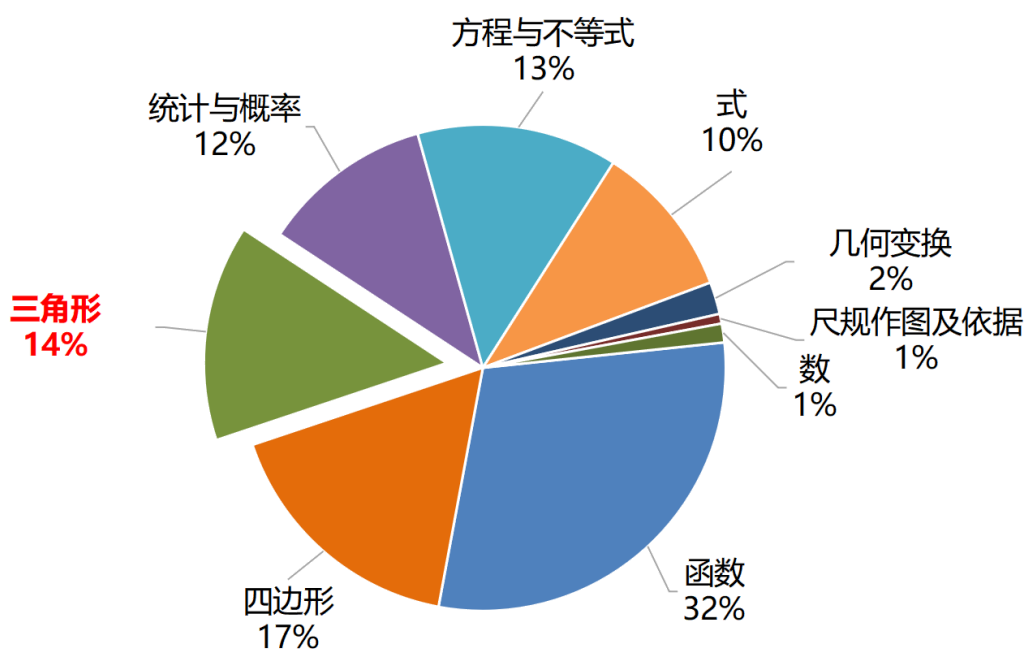


第1讲 勾股定理与逆定理

勾股定理属于人教版第十七章的内容，是期中、期末考试的必考知识点，故这部分我们分为《勾股定理初步》、《勾股定理进阶》两个模块。本模块为《勾股定理初步》，旨在帮助学生了解并熟练掌握勾股定理、逆定理及其简单应用，为《勾股定理进阶》奠定基础。

本模块难度中等，适用于勾股定理、逆定理的基础巩固及勾股定理、逆定理的短期突破，本模块分为勾股定理与逆定理、勾股定理综合应用2讲内容，配套练习册共48题，帮助学生熟悉勾股部分常见题型，理清解题思路，学会利用数学思想解决问题。





- ★勾股定理
- ★勾股定理逆定理
- ★勾股定理、逆定理应用

后续

- ※勾股定理综合应用
- ※勾股定理求最值
- ※特殊角度的直角三角形
- ※直角三角形存在性
- ※勾股定理求两点间距离

一、勾股定理

勾股定理

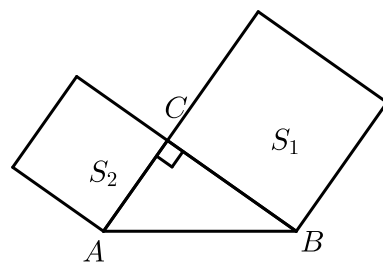
在直角三角形 ABC 中, $\angle A$ 所对的边为: _____,
 $\angle B$ 所对的边为: _____, $\angle C$ 所对的边为: _____.

如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b , 斜边长为 c , 那么
 _____.
 即直角三角形中_____. (文字)

常见勾股数

例题

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 15$, 分别以 AC , BC 为边向 $\triangle ABC$ 外作正方形, 两个正方形的面积分别记为 S_1 , S_2 , 则 $S_1 + S_2$ 等于().



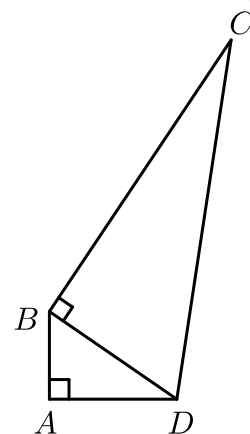
A. 30

B. 150

C. 200

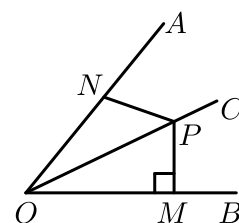
D. 225

2. 如图, 若 $\angle BAD = \angle DBC = 90^\circ$, $AB = 3$, $AD = 4$, $BC = 12$, 则 $CD = ()$.



- A. 5 B. 13 C. 17 D. 18

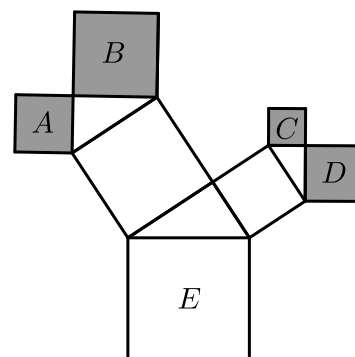
3. 如图， OC 平分 $\angle AOB$ ，点 P 是 OC 上一点， $PM \perp OB$ 于点 M ，点 N 是射线 OA 上的一个动点，若 $OM = 4$ ， $OP = 5$ ，则 PN 的最小值为（ ）。



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

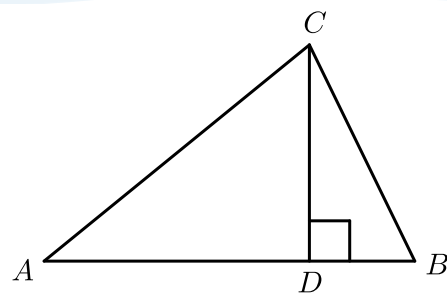
练习

4. 如图是一株美丽的勾股树，其中所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形．若正方形 A 、 B 、 C 、 D 的边长分别是3、5、2、3，则最大正方形 E 的面积是（ ）。



- A. 13 B. 26 C. 47 D. 94

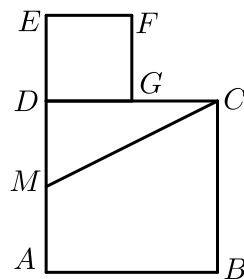
5. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $CD \perp AB$ 于 D ， $AC = 20$ ， $BC = 15$ ， $DB = 9$ 。



(1) 求 DC 的长 .

(2) 求 AB 的长 .

6. 如图，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中， M 为边 AD 的中点，延长 MD 至点 E ，使 $ME = MC$ ，以 DE 为边作正方形 $DEFG$ ，点 G 在边 CD 上，则 DG 的长为 () .



A. $\sqrt{3} - 1$

B. $3 - \sqrt{5}$

C. $\sqrt{5} + 1$

D. $\sqrt{5} - 1$

|| 例题

7. 已知一个直角三角形的两边的长分别是3和4，则第三边长为 _____ .

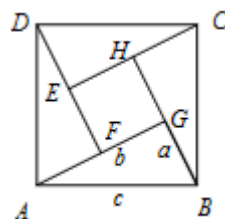
|| 练习

8. 已知直角三角形的三边长分别为5、12、 x ，则 $x =$ _____ .

二、勾股定理的证明

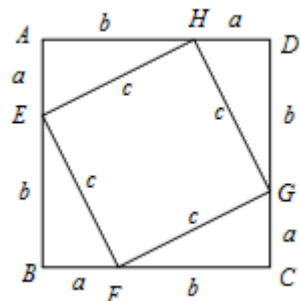
1. 赵爽的“勾股圆方图”（又称“赵爽弦图”）：

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边长分别为 a ， b ($b > a$)，斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 $(b - a)$.



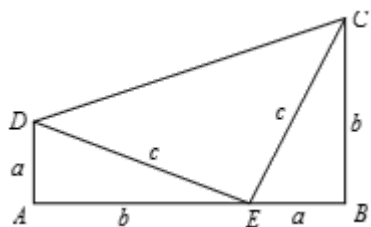
2. 邹元治的证明：

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边分别为 a 、 b ，斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 c 。



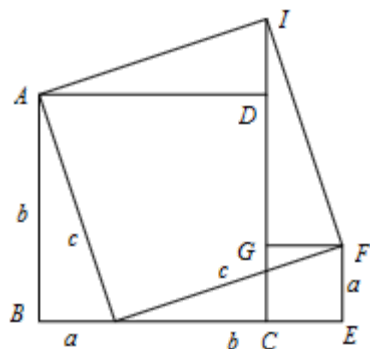
3. 1976年美国总统詹姆斯·加菲尔德的证明：

如图是由2个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边）和一个等腰直角三角形（以 c 为直角边）拼成的直角梯形。



4. 陈杰的证明：

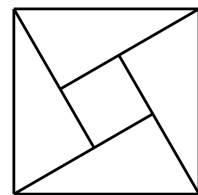
如图，图中有4个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边），3个正方形，边长分别为 a 、 b 、 c ，设整个图形面积为 S 。



例题

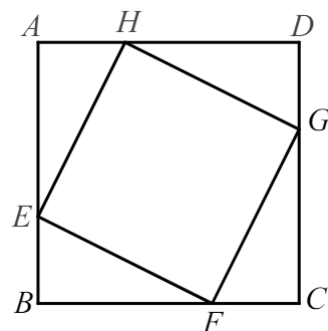
9. “赵爽弦图”巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，是我国古代数学的骄傲，如图所示的“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形，设直角三角形较长的直角边

长为 a ，较短的直角边长为 b ，若 $(a+b)^2 = 21$ ，大正方形的面积为13，则小正方形的面积为（ ）。

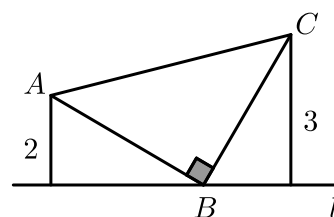


- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

10. 如图，在正方形 $ABCD$ 的面积为25，在各边上顺次截取 $AE = BF = CG = DH = 3$ ，则四边形 $EFGH$ 的面积是 _____。

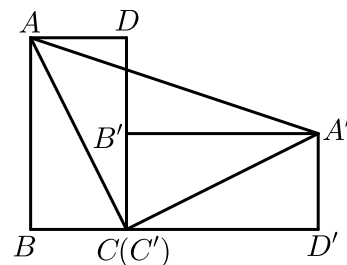


11. 如图，直线 l 过等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 B ， A 、 C 两点到直线 l 的距离分别是2和3，则 AB 的长是（ ）。



- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{11}$ D. $\sqrt{13}$

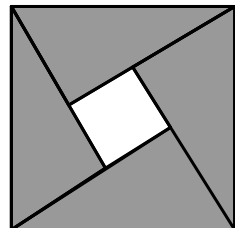
12. 如图，将竖直放置的长方形砖块 $ABCD$ 推倒至长方形 $A'B'C'D'$ 的位置，长方形 $ABCD$ 的长和宽分别为 a 、 b ， AC 的长为 c 。



- (1) 你能用只含 a 、 b 的代数式表示 $S_{\triangle ABC}$ 、 $S_{\triangle C'A'D'}$ 和 $S_{\text{直角梯形}A'D'BA}$ 吗？能用只含 c 的代数式表示 $S_{\triangle ACA'}$ 吗？
- (2) 利用(1)的结论，你能验证勾股定理吗？

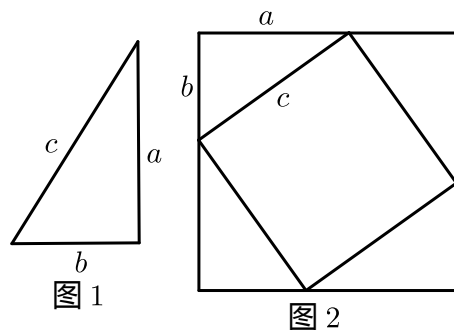
练习

13. 如图，是2002年8月北京第24届国际数学家大会会标我国古代的数学家赵爽为证明勾股定理所作的“弦图”，它由4个全等的直角三角形拼合而成．如果图中大、小正方形的面积分别为52和4，那么一个直角三角形的两直角边的积等于（ ）．

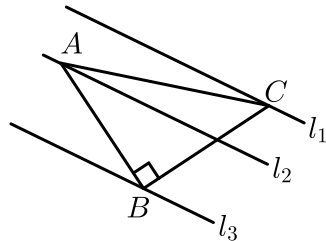


- A. 12 B. $2\sqrt{3}$ C. 24 D. 10

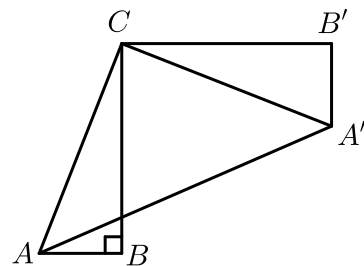
14. 用四个完全相同的直角三角形（如图1）拼成一大一小两个正方形（如图2），直角三角形的两直角边分别是 a 、 b （ $a > b$ ），斜边长为 c ，请解答：



- （1）图2中间小正方形的周长 _____，大正方形的周长为 _____．
 （2）用两种方法表示图2中大正方形的面积．（用含 a 、 b 、 c ） $S =$ _____．
 （3）利用（2）小题的结果写出 a 、 b 、 c 三者之间的一个等式 _____．
 （4）根据第（3）小题的结果，解决下面的问题：已知直角三角形的两条直角边长分别为 $a = 8$ ， $b = 6$ ，求斜边 c 的值．
15. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，三角形的顶点在相互平行的三条直线 l_1 ， l_2 ， l_3 上，且 l_1 ， l_2 之间的距离为1， l_2 ， l_3 之间的距离为3，则点 B 到 AC 的距离 _____．

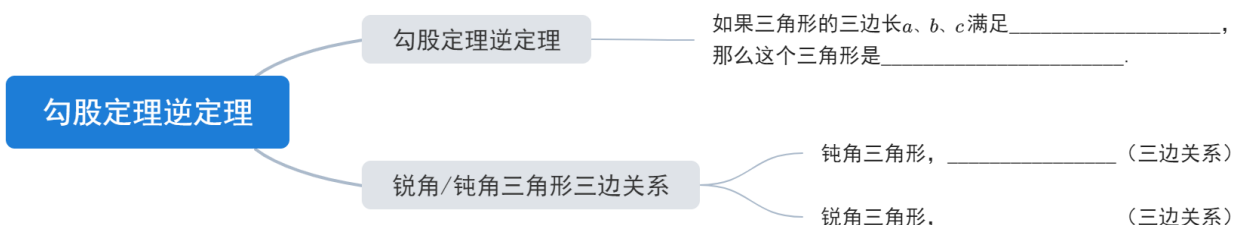


16. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° ，得到旋转后的图形 $\triangle A'B'C$ ．



- (1) $\angle BCB'$ 的度数是 _____ (度) .
- (2) AC 的长为 _____ .
- (3) 求线段 AA' 的长 .

三、勾股定理逆定理



例题

17. 下列各组线段 a 、 b 、 c 中, 能组成直角三角形的是 () .
- A. $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$ B. $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2$
- C. $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$ D. $a = 5$, $b = 12$, $c = 12$
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 下列说法: (1) $\angle B = \angle C - \angle A$; (2) $a^2 = (b+c)(b-c)$; (3) $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$; (4) $a : b : c = 5 : 4 : 3$; (5) $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$, 其中能判断 $\triangle ABC$ 为直角三角形的条件有 () .
- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个
19. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 338 = 10a + 24b + 26c$, 则此三角形为 () .
- A. 直角三角形 B. 钝角三角形 C. 锐角三角形 D. 不能确定

练习

20. 由线段 a 、 b 、 c 组成的三角形不是直角三角形的是 () .
- A. $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$ B. $a = \sqrt{41}$, $b = 4$, $c = 5$
- C. $a = \frac{5}{4}$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ D. $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{5}$

21. 给出下列命题：

- ①在直角三角形 ABC 中，已知两边长为3和4，则第三边长为5；
- ②三角形的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 + c^2 = b^2$ ，则 $\angle C = 90^\circ$ ；
- ③ $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 5 : 6$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形；
- ④ $\triangle ABC$ 中，若 $a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{3}$ ，则这个三角形是直角三角形。

其中，正确命题的个数为（ ）。

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

22. 已知 a, b, c 为三角形 ABC 的三边，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$ ，试判别这个三角形的形状。

|| 例题

23. 已知锐角三角形的边长是2, 3, x ，那么第三边 x 的取值范围是（ ）。

- A. $1 < x < \sqrt{5}$ B. $\sqrt{5} < x < \sqrt{13}$ C. $\sqrt{13} < x < 5$ D. $\sqrt{5} < x < \sqrt{15}$

24. 下列长度的三条线段能组成钝角三角形的是（ ）。

- A. 3, 4, 4 B. 3, 4, 5 C. 3, 4, 6 D. 3, 4, 7

|| 练习

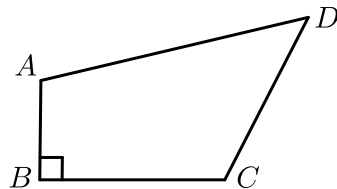
25. 在 $\triangle ABC$ 是锐角三角形， $AB = 5$ ， $AC = 12$ ， $BC = a$ ，则 a 的取值范围是 _____。

26. 一个钝角三角形的两边长为3、4，则第三边可以为（ ）。

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

|| 例题

27. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = 1$ ， $BC = 2$ ， $CD = 2$ ， $AD = 3$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积。



|| 练习

28. 如图所示的一块地， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = 4$ ， $CD = 3$ ， $AB = 13$ ， $BC = 12$ ，求这块地的面积 _____。

